ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ
INFORMATION TECHNOLOGY, COMPUTER SCIENCE AND MANAGEMENT





УДК 517.977.56, 532.522.2

https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-1-65-76

Оригинальное теоретическое исследование

Анализ управляемости и оптимизация формы сопла гидропушки на основе прямого экстремального подхода



EDN: RVWIZA

В.К. Толстых, Ю.В. Дмитрук ✉

Донецкий государственный университет, Донецк, Донецкая Народная Республика

✉ mail@tolstykh.com, loktyushina.julia@yandex.ru

Аннотация

Введение. Анализ управляемости является необходимым этапом для корректной постановки и решения любой задачи оптимального управления. Эта проблема становится особенно актуальной в рамках оптимизации систем с распределенными параметрами, которые описываются уравнениями в частных производных. К таким задачам относится рассматриваемая задача оптимизации формы сопла гидропушки. Оптимальное сопло должно обеспечивать максимальное значение функционала, выражаемого через среднюю силу импульса струи гидропушки. Актуальность данного исследования обусловлена отсутствием единого подхода к анализу управляемости систем с распределёнными параметрами, что затрудняет корректную постановку и решение задач оптимизации. В частности, предыдущие попытки решения задачи оптимизации сопла гидропушки с использованием классического вариационного исчисления не увенчались успехом из-за игнорирования аспектов управляемости. Целью данной работы являлось применение нового подхода, предложенного Толстых В.К., к анализу управляемости для решения задачи оптимального дизайна формы сопла гидропушки.

Материалы и методы. В качестве метода исследования использовался анализ управляемости, основанный на условной корректности по Тихонову обратной задачи. Такой подход позволил выявить условия существования градиента целевого функционала и построить регуляризацию решения обратной задачи адаптивными градиентными методами. Это актуально для многоэкстремальных задач, в том числе для задачи оптимальной формы сопла. Она решалась прямым экстремальным подходом в виде непосредственной максимизации целевого функционала на основе его градиента. В процессе исследования использовалась нелинейная, квазиодномерная математическая модель изоэнтропического течения воды в сопле гидропушки. Течение при этом считалось невязким, сжимаемым и дозвуковым.

Результаты исследования. В рамках исследования были получены условия управляемости, которые позволили радикально упростить задачу оптимизации формы сопла гидропушки. Установлено, что для корректного определения градиента целевого функционала необходимо сузить область решения сопряженной задачи до малой прямоугольной области. Использование адаптивных градиентных методов с удовлетворительными шаговыми множителями обеспечило регуляризацию решения. Впервые были найдены две оптимальные формы сопла гидропушки. Первая форма обеспечивает локальный максимум целевого функционала, вторая — глобальный максимум функционала при ограничении на расширение сопла.

Обсуждение и заключение. Полученные результаты показывают, что направленный поиск оптимального решения невозможно осуществить по производной Фреше без учета условий управляемости. Впервые предложенный подход, в сочетании с необходимыми адаптивными градиентными методами оптимизации, позволил не только корректно поставить задачу оптимизации, но и найти оптимальные формы сопла, обеспечивающие максимальную среднюю силу импульса ультраструи. В некоторых случаях для обеспечения устойчивости решения потребовалось введение ограничения на расширение сопла за пределы ствола гидропушки. Это позволило выполнить требования теоремы об управляемости и гарантировало корректность полученных результатов. Теоретическая

значимость приведенного исследования заключается в развитии методов анализа управляемости для систем с распределенными параметрами, что создает новые возможности для решения схожих задач в других областях. Результаты работы могут быть применены для оптимизации устройств, работающих на основе импульсных струй, а также для дальнейшего исследования более сложных моделей течения жидкости.

Ключевые слова: форма сопла, сопло гидропушки, сила импульса струи, ограничение на расширение сопла, максимизация целевого функционала, градиент

Благодарности. Авторы выражают признательность за плодотворные обсуждения материалов работы научным коллективам кафедр компьютерных технологий и общей физики Донецкого государственного университета и Донецкого института государственной противопожарной службы Министерства Российской Федерации по делам гражданской обороны, чрезвычайным ситуациям и ликвидации последствий стихийных бедствий.

Финансирование. Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДОНГУ» при финансовой поддержке Азово-Черноморского математического центра (Соглашение от 27.02.2025 № 075–02–2025–1608), а также в рамках госбюджетной темы «Разработка интеллектуальных систем анализа и прогнозирования состояния природно-технических объектов (FRRE-2023–0012)» (номер госрегистрации 124012400344-1).

Для цитирования. Толстых В.К., Дмитрук Ю.В. Анализ управляемости для системы с распределенными параметрами в задаче оптимального дизайна формы сопла гидропушки. *Advanced Engineering Research* (*Rostov-on-Don*). 2025;25(1):65–76. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-1-65-76

Original Theoretical Research

Controllability Analysis and Optimization of Hydrocannon Nozzle Shape Based on Direct Extreme Approach

Victor K. Tolstykh, **Yuliia V. Dmitruk** ✉

Donetsk State University, Donetsk, Donetsk People's Republic

✉ mail@tolstykh.com, loktyushina.julia@yandex.ru

Abstract

Introduction. Controllability analysis is a required stage for the correct formulation and solution of any optimal control problem. This problem becomes specifically relevant in the context of optimizing systems with distributed parameters, which are described by partial difference equations. Such problems include the considered problem of optimization of the shape of the nozzle of a hydrocannon. The optimal nozzle should provide the maximum value of the functional expressed through the average force of the impulse of the jet of a hydrocannon. The relevance of this research is due to the lack of a unified approach to the analysis of controllability of systems with distributed parameters, which complicates the correct formulation and solution of optimization problems. In particular, previous attempts to solve the problem of hydrocannon nozzle optimization using classical variational calculus were unsuccessful due to ignoring aspects of controllability. The objective of this research was to apply a new approach proposed by V.K. Tolstykh to controllability analysis to solve the problem of optimal design of the shape of a hydrocannon nozzle.

Materials and Methods. The research method used was controllability analysis based on the Tikhonov conditional correctness of the inverse problem. This approach allowed us to identify the conditions for the existence of the gradient of the objective functional and construct a regularization of the solution to the inverse problem using adaptive gradient methods. It was of current interest for multiextremal problems, including the problem of the optimum nozzle shape. It was solved by a direct extreme approach in the form of direct maximization of the objective functional based on its gradient. In the process of research, a nonlinear, quasi-one-dimensional mathematical model of isentropic water flow in a hydrocannon nozzle was used. The flow was considered inviscid, compressible, and subsonic.

Results. As part of the research, controllability conditions were obtained that allowed us to radically simplify the problem of optimizing the shape of the hydrocannon nozzle. It was found that in order to correctly determine the gradient of the objective functional, it was required to narrow the solution area of the conjugate problem to a small rectangular area. The use of adaptive gradient methods with satisfactory step factors provided for the regularization of the solution. For the first time, two optimum shapes of the hydrocannon nozzle were found. The first shape provided a local maximum of the objective functional, the second — a global maximum of the functional with a restriction on the expansion of the nozzle.

Discussion and Conclusion. The results obtained show that it is impossible to perform a directed search for an optimal solution using the Frechet derivative without taking into account controllability conditions. The first proposed approach, in combination with the desired adaptive gradient optimization methods, allowed us not only to correctly formulate the optimization problem, but also to find optimal nozzle shapes that provided the maximum average pulse force of the ultrajet. In some cases, for the stability of the solution, it was necessary to introduce expansion limitation of the nozzle beyond the barrel of the hydrocannon. This made it possible to meet the requirements of the controllability theorem and

guaranteed the correctness of the results obtained. The theoretical relevance of the research is in the development of controllability analysis methods for systems with distributed parameters, which creates new opportunities for solving similar problems in other areas. The research results can be used to optimize devices operating on the basis of pulsed jets, as well as for further study of more complex models of fluid flow.

Keywords: nozzle shape, hydrocannon nozzle, jet impulse force, nozzle expansion limitation, maximization of objective functional, gradient

Acknowledgements. The authors appreciate the scientific teams of the Departments of Computer Technology and General Physics, Donetsk State University, and Donetsk Institute of State Fire Service, the RF Ministry for Civil Defense, Emergencies and Elimination of Consequences of Natural Disasters, for fruitful discussions of the research materials.

Funding Information. The research is done at the Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "DONSU" with the financial support from the Azov-Black Sea Mathematical Center (Agreement No. 075–02–2025–1608, dated 02.27.2025), as well as within the framework of the state-financed research "Development of Intelligent Systems for Analyzing and Forecasting the Condition of Natural and Technical Facilities (FRRE-2023–0012)" (State Registration No. 124012400344-1).

For citation. Tolstykh VK, Dmitruk YuV. Controllability Analysis and Optimization of Hydrocannon Nozzle Shape Based on Direct Extreme Approach. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don).* 2025;25(1):65–76. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2025-25-1-65-76

Введение. Несмотря на значительное количество исследований в области теории управления, до сих пор отсутствует единый подход к анализу управляемости для систем с распределенными параметрами. Существующие работы, как правило, ограничиваются рассмотрением управляемости как возможности перевода системы из начального состояния в заданное финальное [1]. Однако такой подход оказывается недостаточным для задач оптимизации пространственно-распределенных систем, описываемых уравнениями в частных производных. Управляемость по финальному состоянию не гарантирует управляемость по условиям, заданным в целевом функционале, что делает анализ таких систем сложным и неочевидным. В данной работе авторы предлагают использовать понятие управляемости, предложенное Толстых В.К. [2], и применить его для поиска оптимальной формы сопла гидропушки.

Гидропушки, предназначенные для формирования импульсных струй жидкости высокого давления, находят широкое применение, например, в горной промышленности для разрушения горных пород [3]. Эффективность таких устройств во многом зависит от формы сопла [4], что делает задачу его оптимизации актуальной. Несмотря на значительный интерес к этой проблеме, существующие исследования, такие как работы Зуйковой З. Г. [5], Зубова В.И. [6] и Атанова Г. А. [7], носят преимущественно теоретический характер. Авторы этих работ сформулировали необходимые условия оптимальности, однако численные результаты не подтверждались доказательствами их оптимальности. Более того, как будет показано в данной работе, ранее полученные «оптимальные» формы сопел не являются таковыми. Таким образом, несмотря на многолетние исследования, проблема дизайна оптимальной формы сопла остается нерешенной.

Решение этой сложной задачи возможно только при использовании прямого экстремального подхода с оригинальными адаптивными градиентными методами, описанными в работе Толстых В.К. [8]. Целью данной работы являлось применение нового подхода, предложенного в работе [2], к анализу управляемости системы с распределенными параметрами для задачи оптимального дизайна формы сопла гидропушки. Таким образом, статья направлена на развитие теории управляемости для систем с распределенными параметрами и демонстрацию ее практической применимости на примере оптимизации формы сопла гидропушки.

Материалы и методы. Суть прямого экстремального подхода заключается в непосредственной максимизации градиентными методами некоторого целевого функционала:

$$J(u) = \int_{\omega} I(v,u)\, d\omega \to max,\ \omega \subset \bar{\Omega},$$
$$\text{при условии } \mathbb{D}(v,u)v = 0 \text{ на } \bar{\Omega}. \qquad (1)$$

Здесь управление (в нашем случае — функция формы сопла по длине x) $u(x) \in U(S)$, $S = (x_a, x_b)$ — область определения управления, U — допустимое множество управлений, $v(x, t) \in V(\bar{\Omega})$ — состояние нестационарного процесса формирования ультраструи на замкнутом пространственно-временном множестве $\{x, t\} = \bar{\Omega}$. Оператор $\mathbb{D}$ включает в себя конкретный вид дифференциальных уравнений течения воды в гидропушке и действует на v. Функция цели $I(v, u)$ определена на множестве ω, а ее значение явно зависит от параметров v и u.

В прямом подходе не используются какие-либо промежуточные (например, необходимые условия оптимальности), а непосредственно решается задача:

$$u_* = arg\, max\, J(u), \qquad (2)$$

где u_* — оптимальное управление.

Исходная задача с уравнениями распределенной системы $\mathbb{D}(v, u)v = 0$ характеризуется прямым отображением:

$$U(S) \to V(\bar{\Omega}),\ S \subset \bar{\Omega}.$$

В то же время задача оптимизации (1) является обратной. Такие задачи, как правило, некорректны в классическом смысле [9]. Решение прямых и обратных задач существенно различается. Последние требуют регуляризации решения до сужения множества возможных решений U до компакта корректности $\mathcal{U} \subseteq U$ что приводит к условной корректности по Тихонову. В прямом экстремальном подходе регуляризация осуществляется градиентными методами.

Согласно определению управляемости [2], распределенная система в задаче (1) будет управляема посредством $u(x) \in U(S)$ относительно целевого функционала J, когда корректной по Тихонову будет обратная задача отображения элементов пространства $V(\omega)$ состояний модели в элемент u_* при условии $max\ J$:

$$V(\omega) \xrightarrow{max\,J} u_* \in U(S),\quad \omega \subset \bar{\Omega}.$$

Далее, при решении задачи (2), сделаем анализ управляемости и получим условия управляемости, которые позволят корректно поставить и решить задачу оптимизации формы сопла гидропушки градиентными методами [10].

В работе [8] подробно описана постановка рассматриваемой задачи для дозвуковых, осесимметричных течений сжимаемой жидкости в плавно меняющихся каналах. Напомним ее в форме, необходимой для дальнейших исследований. Изоэнтропическое движение воды в сопле описывается квазиодномерной, квазилинейной гиперболической системой уравнений [11]:

$$\mathbb{D}v = \frac{\partial v}{\partial t} + A\frac{\partial v}{\partial x} + F = 0 \text{ на } \Omega. \tag{3}$$

Состояние системы характеризуется вектор-функцией $v = \{\rho, w\} \in V(\bar{\Omega})$, где ρ — плотность воды, w — скорость воды. Оператор $\mathbb{D} = \frac{\partial}{\partial t} + A\frac{\partial}{\partial x} + F$, его матрица $A(v) = \begin{pmatrix} w & \rho \\ \frac{c^2}{\rho} & w \end{pmatrix}$ и вектор $F(v,u) = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi = \rho w u \Theta(x - x_a)$, Θ — тета-функция Дирака, x_a — начало сопла в конце ствола гидропушки, $c^2 = \frac{Bn\rho^{n-1}}{\rho_0^n}$ — квадрат скорости звука в воде, B и n — постоянные в уравнении состояния воды в форме Тета.

Управление описывается формулой:

$$u(x) = \frac{1}{\sigma(x)}\frac{d\sigma(x)}{dx} \in U(S),\quad S = (x_a, x_b). \tag{4}$$

Здесь σ — площадь поперечного сечения сопла, $\sigma(x) = \sigma_a e^{\int_{x_a}^{x} u(\zeta)d\zeta}$, $x \in [x_a, x_b]$, $\sigma_a = \sigma(x_a)$. В стволе гидропушки при $x \le x_a$ управление $u(x)$ отсутствует, а свободный член $\varphi = 0$.

Граничные и начальные условия задачи (3):

$$\frac{dw}{dt} + \frac{uB}{m_p}\left(\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n - 1\right) = 0 \text{ на } \Gamma_p,$$

$$\rho = \rho_0 \text{ на } \Gamma_{b0} \cup \Gamma_{b1},$$

$$v(x, t_0) = (\rho_0, w_0) \text{ на } \Gamma_0.$$

Здесь m_p — масса поршня, ρ_0 — плотность воды при атмосферном давлении, w_0 — скорость воды и поршня до начала втекания в сопло. Границы процесса Γ для области Ω показаны на рис. 1. Вид Ω важен для анализа управляемости.

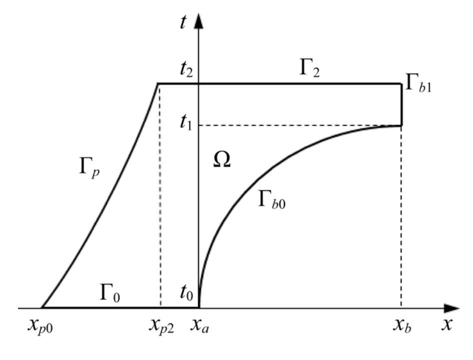


Рис. 1. Область течения воды в гидропушке

Уточним Ω. Начало координат совмещено со входом в сопло x_a, а t_0 — время начала втекания воды в сопло. С одной стороны, вода ограничена поршнем, движущимся в стволе гидропушки по траектории Γ_p, а с другой — свободной поверхностью втекания Γ_{b0} от t_0 до t_1 и истечения Γ_{b1} от t_1 до t_2. Линия начального состояния системы (3) — это Γ_0, координаты x_{p0} и x_{p2} — начальное и конечное положение поршня. Указанные Г-линии для Ω образуют замыкание $\bar{\Omega}$. Область определения управления $S = P_x(\Omega\big|_{x>x_a})$, т. е. при $x > x_a$ S является проекцией части области Ω на ось x.

Задача оптимизации (оптимального дизайна формы сопла) формулируется следующим образом: необходимо найти управление $u(x)$, доставляющее максимум функционалу:

$$J(u) = \int_{t_1}^{t_2} I(w,u)\big|_\omega dt, \quad I(w,u)\big|_\omega = \frac{\rho_0 \sigma(x_b) w^2(x_b,t)}{t^2 - t^1}. \tag{5}$$

Целевой функционал задается на $\omega = \Gamma_{b1}$, т. е. на срезе сопла гидропушки и определяет среднюю силу действия струи на возможную преграду [12].

Градиентный алгоритм для максимизации функционала (5) имеет вид:

$$u^{k+1}(x) = u^k(x) + b^k \nabla J(u^k; x), \quad x \in S, \quad k = 0, 1\ldots, \tag{6}$$

где k — номер итерации; b^k— шаговый множитель, регулирующий подъем к $max\ J$ в направлении градиента ∇J^k.

Градиент представляет собой функциональную производную Фреше $J_u^{'}$, которую можно найти из первой вариации целевого функционала $\delta J = \langle J_u^{'}, \delta u \rangle_{U^*(S)}$. Здесь угловые скобки означают скалярное произведение, в данном случае — в сопряженном пространстве управлений $U^*(S)$. Верхний индекс * означает сопряженность.

Следует отметить, что иногда градиент функционала на Гильбертовом пространстве путают с производной Фреше этого функционала [13]. Производная $J_u^{'}(u; x)$ может быть нечувствительна к управлению $u(x)$ на всем множестве S или на частях S ненулевой меры. Поэтому в общем случае $J_u^{'}(u; x)$ в (6) не будет указывать достоверное направление коррекции u^k для направленного поиска оптимального решения $u_*(x)$. Градиент из производной Фреше можно получить только при реализации условий управляемости.

Ранее упоминались подходы к решению задач оптимизации сопла гидропушки с целью максимизации средней силы импульса струи [5], функционала, зависящего от параметров течения [6], а также максимизации скорости истечения [7]. В этих работах после варьирования δJ получено формальное выражение для производной $J_u^{'}$. Оно зависит от решения $f = (f_1, f_2) \in V^*(\bar{\Omega})$ линейной сопряженной гиперболической задачи:

$$-\frac{\partial f}{\partial t} - A^T \frac{\partial f}{\partial x} + F_v^{'T} f = 0 \text{ на } \Omega. \tag{7}$$

Верхний индекс T означает транспонирование, $F_v^{'}$ — производная свободного члена F по v. Граничные и начальные (терминальные на Γ_2) условия:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_p f_2}{F_a \rho}\right) + f_1 \rho = 0 \text{ на } \Gamma_p,$$

$$f_1 = 0 \text{ на } \Gamma_{b0},$$

$$\rho_0 f_1 + w_b f_2 + I_w^{'} = 0, \quad I_w^{'}\big|_\omega = \frac{2\rho_0 \sigma_b w_b}{t_2 - t_1} \text{ на } \Gamma_{b1},$$

$$f_1 = 0, f_2 = 0 \text{ на } \Gamma_2.$$

Производную Фреше $J_u^{'}$ иногда называют невязкой или градиентом. Ее удобнее представить в операторном виде:

$$J_u^{'}(u; x) = \mathbb{U}_\varnothing^* f(x,t) \equiv \mathbb{U}^* f(x,t) + \kappa J \in U^*(S). \tag{8}$$

Здесь сопряженный неоднородный оператор $\mathbb{U}_\varnothing^* = \mathbb{U}^* + \kappa J$, $\mathbb{U}^*$— сопряженный однородный оператор, точка означает место аргумента f операторов, κ — весовой коэффициент выравнивания вычислительных помех численного решения исходной и сопряженной задач [8]. В выражении (8) присутствует значение функционала в виде числа J. Это значение производной $I_u^{'}$.

Неоднородность оператора $\mathbb{U}_\varnothing^*$ — следствие зависимости целевой функции $I(w, u)$ от управления u. Такая зависимость является редкой особенностью задач оптимизации и может заметно осложнить вычисление градиента.

Значение однородного оператора $\mathbb{U}^*$ в производной (8) имеет вид:

$$\mathbb{U}^* f = \int_{\Gamma_{b0}}^{t_2} F_u^{'T} f dt = \int_{\Gamma_{b0}}^{t_2} \rho w f_1 dt,$$

где интегрирование производится от нижней нелинейной границы Γ_{b0} (рис. 1) при втекании воды в сопло.

Смысл и предназначение сопряженной задачи заключается в отображении производной I'_w (чувствительность J к w) из области ω в область S, где определены градиент и управление. Такое отображение при помощи f делается с использованием промежуточного множества $\mathbf{\Omega} \subset \bar{\Omega}$, которое, согласно управляемости, задает корректную область $V^*(\mathbf{\Omega})$ определения однородного оператора $\mathbb{U}^*$, чтобы в выражении (8) из J'_u получить градиент ∇J.

То есть сопряженная задача реализует отображение:

$$f : V^*(\omega) \to V^*(\mathbf{\Omega}).$$

Далее при помощи оператора $\mathbb{U}^* : V^*(\mathbf{\Omega}) \to U^*(S)$ можно получить градиент из производной Фреше J'_u:

$$J'_u \mathbb{U}^*_\varnothing \to \mathbb{U}^*_\varnothing f\big|_{\mathbf{\Omega}} = \nabla J \in U^*(S).$$

Область $\mathbf{\Omega}$ выявляется из анализа управляемости.

Результаты исследования. Требования к условиям управляемости в рамках прямого экстремального подхода сформулированы в следующей теореме (доказательство см. в [2]).

Теорема. Математическая модель $\mathbb{D}(v, u)v = 0$ в задаче (3) управляема посредством $u(x)$ на S по функционалу J если:

1) существует область $V^*(\mathbf{\Omega})$, $\mathbf{\Omega} \subset \bar{\Omega}$ корректного сопряженного состояния, которая является областью определения оператора $\mathbb{U}^*$ с его значениями в области градиентов $U^*(S)$;

2) оператор $\mathbb{U}^*$ — невырожденный;

3) алгоритм (6) при $u^0 \in \mathcal{U}$ использует удовлетворительные параметры регуляризации b^k.

Начнем с первого и наиболее сложного требования теоремы. Сначала необходимо убедиться в классической корректности исходной и сопряженной задач. Исходная (3) и сопряженная (7) системы относятся к типу гиперболических. Собственные числа матриц A и A^T одинаковы. Поэтому в обеих системах будут одинаковыми характеристики $\xi_{1,2}$ — как траектории распространения возмущений в плоскости (x, t) вдоль характеристических направлений $\frac{d\xi_{1,2}}{dt} = w \pm c$. Сопряженные волны, порождаемые производной $I'_w\big|_\omega \in V^*(\omega)$ на срезе сопла $\Gamma_{b1} = \omega$, будут двигаться с теми же характеристиками, что и исходные, но в обратном направлении. Начальное условие для сопряженной задачи задано на терминальной линии Γ_2.

Все характеристики в области Ω выходят из участков границы $\partial\Omega$ с известными решениями, заданными краевыми условиями. При течении безударных волн (именно такие течения рассматриваем в данном исследовании) характеристики одного и того же семейства не будут пересекаться, а на пересечении двух характеристик разного семейства ξ_1 и ξ_2 в любой точке $\bar{\Omega}$ может быть найдено решение гиперболической системы двух уравнений [14] в виде двумерных вектор-функций v и f.

Чтобы найти область определения оператора $\mathbb{U}^*$, нужно провести анализ и выявить существование следующей последовательности отображений, начиная от управления $u \in U(S)$ и заканчивая градиентом $\nabla J \in U^*(S)$:

$$U(S) \ni u \xrightarrow{\text{однозначно}} I'_w\big|_\omega \xrightarrow{\text{однозначно}} f\big|_{\mathbf{\Omega}} \in V^*(\mathbf{\Omega}) \xrightarrow{\mathbb{U}^*} U^*(S).$$

Можно проще описать обсуждаемую проблему. Во-первых, целевой функционал $J(u)$, заданный на ω, должен быть чувствителен к управлению, заданному на S (чувствительность характеризуется производной $I'_w\big|_\omega$). Во-вторых, из множества сопряженных решений на всем $\bar{\Omega}$ надо выделить такое подмножество $\mathbf{\Omega}$, где сопряженные решения $f\big|_{\mathbf{\Omega}}$ будут однозначно зависеть от значений целевого функционала в виде $I'_w\big|_\omega$. На всей области $\bar{\Omega}$ такой зависимости может и не быть. В-третьих, множество $\mathbf{\Omega}$ должно обеспечивать оператору $\mathbb{U}^*$ возможность отображения сопряженных состояний $f\big|_{\mathbf{\Omega}}$ в $U^*(S)$. Такое отображение представлено последней веткой, где оператор $\mathbb{U}^*$ из полученной области определения $V^*(\mathbf{\Omega})$ может произвести отображение в область значений $U^*(S)$, где существует градиент $\Delta J = \mathbb{U}^*_\varnothing f\big|_{\mathbf{\Omega}}$.

Из корректности исходной прямой задачи следует, что любые функции $u(x) \in U(S)$ будут однозначно влиять на значение производной целевой функции I'_w на $\omega = \Gamma_{b1}$ через характеристики ξ_1, если хотя бы одна из них прошла через все сопло. Потеря такого влияния возможна при наличии диссипаций в системе, но при изоэнтропических течениях этого нет. То есть имеет место левая ветка отображений в (9):

$$U(S) \ni u \xrightarrow{\text{однозначно}} I'_w\big|_\omega.$$

Перейдем к выявлению множества $\mathbf{\Omega}$, необходимого для области $V^*(\mathbf{\Omega})$ определения оператора $\mathbb{U}^*$. Член $I'_w\big|_\omega$ в граничном условии сопряженной задачи (7) вызывает возмущения сопряженного решения f. Они распространяются в виде волн по характеристикам первого семейства ξ_1 в обратном временном направлении от среза сопла в сторону поршня (рис. 2).

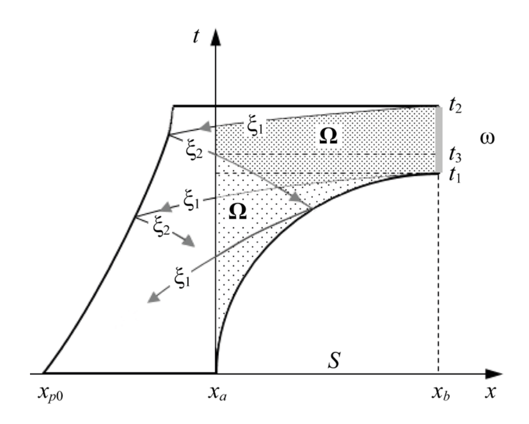


Рис. 2. Пространственно-временная диаграмма области **Ω** с избыточной областью ω

Эти возмущения распространяются вдоль всего сопла и переносят информацию о целевом функционале из точек ω в точки на $S = (x_a, x_b)$. На поршне волны, описываемые характеристиками первого семейства ξ_1, отражаются и, меняя направление своего распространения, продолжают переносить информацию, полученную от ξ_1 о возмущениях $I'_w\big|_\omega$, добавляя при этом новую информацию о движении поршня. Такой процесс отражений волн от поршня и от внутренней части сопла продолжается до момента t_0.

Начиная с момента t_3 и ниже, в одну и ту же точку некоторых участков множества S будут приходить две сопряженные волны ξ_1 и ξ_2, порожденные разными значениями I'_w и с ненужной информацией (помехами), как минимум, от поршня. А ниже характеристики ξ_1, вышедшей из сопла ниже t_1, будет добавлена еще и ненужная информация от сопла. Эта информация не нужна, т. к. не содержит сведений о цели оптимизации из $I'_w\big|_\omega$.

На рис. 2 показан пример возможного множества **Ω** (вся заштрихованная с разной плотностью область под верхней характеристикой ξ_1 от x_a до x_b). В данном случае **Ω** соответствует производной Фреше J'_u. В области **Ω**, под характеристикой ξ_2 (отражение ξ_1, вышедшей при t_2) и под ξ_1 (вышедшей при t_1) образуется светлая область неоднозначного влияния значений функции $I'_w\big|_\omega$ на сопряженное состояние f. Очевидно, что бессмысленно решать сопряженную задачу и рассчитывать градиент в такой области **Ω**.

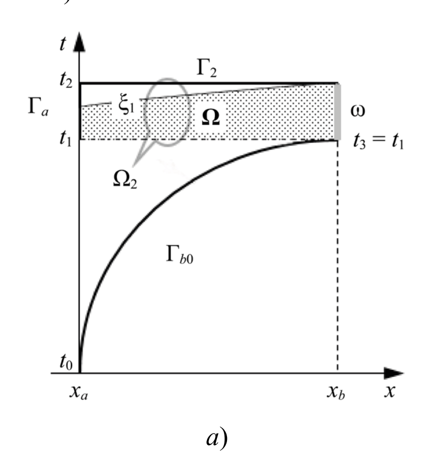
Разумно ограничиться рассмотрением (рис. 2) сопряженного состояния f на части **Ω**, заключенной в прямоугольнике:

$$\Omega_1 = \left(x_a, x_b\right) \times \left(t_1, t_2\right).$$

При этом прямоугольник Ω_1 следует считать слишком большим, если поршень находится относительно близко к началу сопла, оказывая влияние на сопряженное состояние.

В таком прямоугольнике Ω_1 множество **Ω** (заштриховано с разной плотностью на рис. 2 от t_1 до t_2) будет соответствовать избыточному множеству ω. То есть в целевом функционале J интервал (t_1, t_2) будет избыточным. При этом в рассматриваемой области **Ω** могут присутствовать неприемлемые помехи слева (малая плотность штриховки в Ω_1) для вычисления градиента ∇J.

Избыточность ω устраняется дальнейшим сокращением Ω_1 до $t_3 = t_1$, т. е. когда t_3 соответствует началу истечения (рис. 3 *а*).



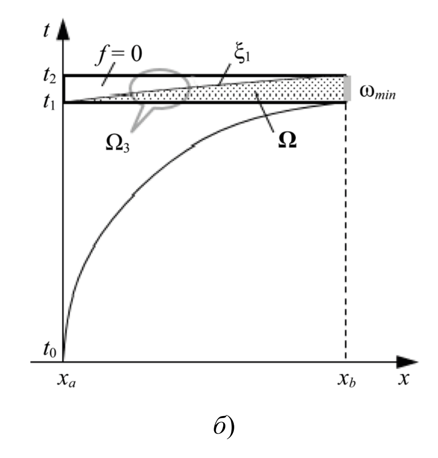


Рис. 3. Пространственно-временные диаграммы корректных областей **Ω** для определения градиента:
а — **Ω** в области Ω_2; *б* — **Ω** в области Ω_3

Информатика, вычислительная техника и управление

В этом случае вся область достаточного решения сопряженной задачи сужается до еще меньшего прямоугольника:

$$\Omega_2 = \left(x_a,\, x_b\right) \times \left(t_3 = t_1,\, t_2\right).$$

Здесь поршень не будет «мешать» отображению $I'_w\big|_\omega \xrightarrow{\text{однозначно}} f\big|_{\mathbf{\Omega}}$.

Если по техническим условиям конструирования гидропушки допускается еще большее сокращение времени истечения $t_2 - t_1$, то можно уменьшить прямоугольник решения сопряженной задачи еще сильнее, до прямоугольника Ω_3 с соответствующей треугольной областью $\mathbf{\Omega}$ (рис. 3 *б*):

$$\Omega_3 = \left(x_a,\, x_b\right) \times \left(t_1,\, t_2\right).$$

Здесь имеет место минимально достаточное множество ω_{min} для формирования области определения $V^*(\mathbf{\Omega})$ оператора $\mathbb{U}^*$.

Именно в полученных областях $\mathbf{\Omega}$, находящихся внутри Ω_2 и Ω_3 (рис. 3), существует область определения $V^*(\mathbf{\Omega})$ оператора $\mathbb{U}^*$ с однозначным отображением производных $I'_w\big|_\omega$ посредством f в область значений градиента $U^*(S)$.

Сопряженная задача (7) и ее решение в прямоугольниках $\Omega_{2,3}$ становятся существенно проще:

$$-\frac{df}{dt} - A^T \frac{df}{dx} + F_v'^T f = 0 \text{ на } \Omega_{2,3},$$
$$f = 0 \text{ на } \Gamma_a \cup \Gamma_2, \qquad (10)$$
$$\rho_0 f_1 + w_b f_2 + I'_w = 0 \text{ на } \Gamma_{b1}.$$

Здесь $\Gamma_a = x_a \times (t_1, t_2)$. Теперь нет влияния поршня с линии Γ_p и нет втекания в сопло на границе Γ_{b0}.

Формула (8) расчета градиента целевого функционала также принимает упрощенный вид (нет нелинейной границы интегрирования Γ_{b0}):

$$\nabla J\left(u;\, x\right) = \mathbb{U}^*_\varnothing f = \int_{t_1}^{t_2} \rho w f_1 dt + \kappa J, \quad x \in \left(x_a,\, x_b\right). \qquad (11)$$

Полученное множество $\mathbf{\Omega} \subset \Omega_{2,3}$ будет корректно задавать область $V^*(\mathbf{\Omega})$ определения оператора $\mathbb{U}^*(\mathbf{\Omega})$ с областью значений в $U^*(S)$. Соответствующее выражение времени, необходимое для формирования такого $\mathbf{\Omega}$, зависит от характеристик первого семейства ξ_1 и имеет вид:

$$t_2 \ge t_1 + \int_{x_a}^{x_b} \frac{dx}{w + c}, \quad t_1 \ge t_3. \qquad (12)$$

То есть, во-первых, верхняя характеристика ξ_1 должна пройти через всё сопло от x_b до x_a, во-вторых, начало истечения t_1 не должно быть меньше момента t_3 начала попадания в сопло волн, отражённых от поршня.

Данное выражение является условием управляемости в рассматриваемой задаче. При этом выполняются оставшиеся ветки отображений (9):

$$I'_w\big|_\omega \xrightarrow{\text{однозначно}} f\big|_{\mathbf{\Omega}} \xrightarrow{\mathbb{U}^*} U^*(S).$$

Теперь обсудим требование 2 в теореме о невырожденности оператора $\mathbb{U}^*$. Начнем с оператора $\mathbb{U}^*_\varnothing$, задающего градиент (8). Если бы целевая функция I не зависела явно от управления u, то $\mathbb{U}^*_\varnothing \equiv \mathbb{U}^*$ и множество сопряженных состояний в ядре $f_{ker} = \{f : \mathbb{U}^* f = 0 \text{ на } S\}$ было бы нулевым при неограниченном оптимальном управлении u_*. В нашем же случае для $\mathbb{U}^*_\varnothing$ значения элементов ядра f_{ker} не будут нулевыми, т. е. оптимальному управлению будут соответствовать ненулевые сопряженные состояния. Нижний индекс $\varnothing$ означает отсутствие нулевого ядра. Очевидно, что если $\mathbb{U}^*$ был невырожденным, то и оператор $\mathbb{U}^*_\varnothing$ будет невырожденным. Неоднородность оператора $\mathbb{U}^*_\varnothing$ в нашей задаче приводит всего лишь к смещению нулевого ядра однородного оператора $\mathbb{U}^*$.

Оценим возможную вырожденность однородного оператора $\mathbb{U}^*$. Очевидно, что при любых значениях ρ и w результат интегрирования в $\mathbb{U}^* f = \int_{t_1}^{t_2} \rho w f_1 dt$ может стать нулевым на S только при $f_1 = 0$ на $\mathbf{\Omega}$. Это означает, что оператор $\mathbb{U}^*$ — невырожденный, а следовательно, и $\mathbb{U}^*_\varnothing$ — невырожденный.

Остается последнее требование теоремы. Регуляризация в прямом экстремальном подходе обеспечивается:

– выбором начального приближения $u^0 \in \mathcal{U}$;

– последующими шагами алгоритмов типа (6) с удовлетворительным параметром регуляризации, т. е. с параметром b^k, не выводящим управление u^{k+1} за пределы компакта $\mathcal{U}$.

В работе [8] описаны необходимые регуляризирующие градиентные методы для алгоритма (6) в рассматриваемой задаче.

Таким образом, все требования теоремы для обеспечения управляемости выполнены. Распределенная система (3) управляема посредством $u(x)$ на S по функционалу J (5) при условии (12).

Результаты использования условий управляемости для гидропушки. Параметры экспериментальной установки были заимствованы из исследования А. Н. Семко [15]:

– начало координат $x_a = 0$;

– длина сопла $x_b = 0{,}253$ м;

– начальное положение поршня с левой границей воды $x_{p0} = -0{,}28$ м;

– масса поршня $m_p = 2{,}25$ кг;

– начальная скорость поршня и воды $\omega_0 = 76{,}2$ м/с;

– плотность воды при атмосферном давлении $\rho_0 = 10^3$ кг/м^3;

– радиус ствола гидропушки $R_a = 33 \cdot 10^{-3}$ м;

– начало втекания воды в сопло $t_0 = 0$.

Исходная задача решалась в сложной замкнутой области $\bar{\Omega}$, а сопряженная — на небольшом прямоугольнике $\bar{\Omega}_2 = [x_a, x_b] \times [t_1, t_2]$. Были построены две пространственные сетки, каждая из которых содержит 50 шагов. Первая сетка является подвижной и используется для расчета течения воды от поршня до среза сопла, тогда как вторая сетка неподвижна и предназначена для описания формы сопла. Количество слоев по времени было переменным и доходило до 10^3. Точное значение зависит от формы сопла и определяется конечным временем t_2. Исходная и сопряженная задачи решалась методом характеристик на одинаковых подвижных сетках в $\bar{\Omega}$ и в $\bar{\Omega}_2$ соответственно.

Начало истечения струи из сопла наблюдалось при $t_1 \approx 2{,}7 \cdot 10^{-3}$ с. Среднее значение силы импульса полученной струи оценивалось по целевому функционалу $J(u)$ в интервале $t_2 - t_1 = 3 \cdot 10^{-4}$ с. Данный интервал составляет примерно $2\int_{x_a}^{x_b} \frac{dx}{w+c}$. При этом время начала истечения $t_1 > t_3$, т. е. поршень не влияет на истечение. Таким образом, заданное время t_2 удовлетворяет условию управляемости (12).

В работе [8] реализованы необходимые адаптивные вычислительные экстремальные алгоритмы с учетом описанных здесь условий управляемости и приведены впервые полученные оптимальные формы сопла.

На рис. 4 сопло 1 соответствует внутреннему локальному максимуму функционала $J(u)$, а сопло 2 — краевому максимуму при ограничении на расширение сопла: $u(x) \leq 0$, $\forall x \in S$. Первое сопло практически имеет форму конуса, в то время как второе обеспечивает целевому функционалу достижение глобального максимума, значение которого J примерно в три раза превышает значение, полученное для первого сопла.

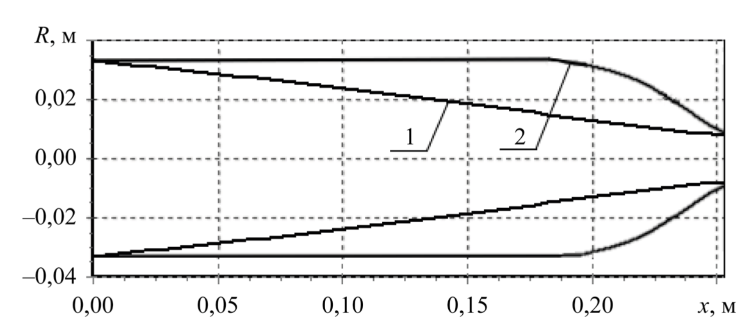


Рис. 4. Оптимальные формы сопла гидропушки

Начальное приближение $u^0(x)$ задавалось в виде трубы — как продолжение ствола пушки. На первых итерациях сужения сопла рост функционала $J(u)$ происходил при его выпуклости (рост нормы ∇J). Далее выпуклость сменилась на вогнутость (убывание нормы ∇J), в конце которой находились очень малые области максимума (минимальная норма ∇J при вогнутости функционала) с последующим выпуклым минимумом. В локальном максимуме было получено сопло 1. Переход через эти локальные экстремумы сопровождался далее неограниченным выпуклым ростом $J(u)$. Только добавление ограничения на управление позволило остановить неконтролируемое расширение сопла на границе с разумной формой 2.

Напомним, что ранее предпринимались попытки получить удовлетворительное решение с помощью классического вариационного исчисления. Для этого авторы работ [5] и [7] задействовали методы релаксации для поиска корня u_* из необходимого условия оптимальности $J'_u(u;\,x) = 0$ (производная Фреше J'_u на некорректном **Ω** из рис. 2). Однако такой подход не дал желаемых результатов. Более того, он требует дополнительного ограничения на площадь среза сопла для предотвращения его схлопывания. Такое схлопывание также подтверждает некорректность использования $J'_u(u;\,x)$ для направленного поиска $u_*(x)$ без выделения области управляемости **Ω** внутри $\Omega_{2,3}$. Иными словами, вместо производной Фреше необходимо получить градиент с обоснованием.

Обсуждение и заключение. Результаты исследования демонстрируют, что применение анализа управляемости, предложенного в работе [2], позволило выявить ключевые условия управляемости (12), необходимые для корректной постановки и решения задачи оптимизации формы сопла гидропушки.

Согласно условиям управляемости, задачу оптимизации необходимо ставить и решать в малой прямоугольной области Ω_2 или даже Ω_3, а не в большой и сложной области Ω. Это связано с тем, что задача оптимизации формы сопла с постановкой в Ω не приводит производную Фреше J'_u к градиенту ∇J, что делает невозможным направленный поиск оптимального решения. Именно это обстоятельство стало причиной неудач предыдущих исследований, где оптимальность решений не была доказана.

Рекомендуем сначала делать анализ управляемости до выявления корректной области управляемости **Ω**, а потом для полученной **Ω** выделять область решения сопряженной задачи (в нашем случае — это Ω_2 или Ω_3) и находить вариацию $\delta J = \langle J'_u, \delta u \rangle_{U^*(S)}$. Затем можно продолжить анализ управляемости и из производной J'_u получить градиент ∇J. Именно с помощью **Ω** внутри $\Omega_{2,3}$ можно найти значение градиента $\nabla J(u;\,x)$, которое распределено вдоль всего сопла и однозначно соответствует целевому функционалу задачи $J(u)$. Далее можно целенаправленно искать оптимальную форму сопла.

Основное преимущество предложенного подхода заключается в использовании прямого экстремального метода, который позволяет непосредственно максимизировать целевой функционал с помощью градиентных алгоритмов. Это обеспечивает не только наглядность анализа управляемости, но и возможность получения численно подтвержденных оптимальных решений.

Теоретическая ценность исследования состоит в развитии методов анализа управляемости для систем с распределенными параметрами, что открывает новые перспективы для решения аналогичных задач в других областях. Дальнейшие исследования могут быть направлены на расширение метода для более сложных моделей течения жидкости, а также на оптимизацию других устройств, работающих на основе импульсных струй.

Список литературы / References

1. Егоров А.И., Знаменская Л.Н. *Введение в теорию управления системами с распределенными параметрами*. СПб: Лань; 2022. 292 с. URL: https://e.lanbook.com/book/167413 (дата обращения: 10.11.2024).

Egorov AI, Znamenskaya LN. *Introduction to Distributed Parameter Control Theory*. St. Petersburg: Lan; 2022. 292 p. (In Russ.) URL: https://e.lanbook.com/book/167413 (accessed: 10.11.2024).

2. Tolstykh VK. Controllability of Distributed Parameter Systems. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2024;64(6):1211–1223. https://doi.org/10.1134/S0965542524700453

3. Мерзляков В.Г., Деревяшкин И.В., Бойкова И.Е., Толмачев А.И. Разрушение угля и горных пород высокоскоростными струями воды. *Горный информационно-аналитический бюллетень*. 2023;(4):140–156. URL: https://giab-online.ru/files/Data/2023/4/04_2023_140-156.pdf (дата обращения: 10.11.2024).

Merzlyakov VG, Derevyashkin IV, Boykova IE, Tolmachev AI. Coal and Rock Fracturing by High-Velocity Water Jets. *MIAB. Mining Informational and Analytical Bulletin.* 2023;(4):140-156. URL: https://giab-online.ru/files/Data/2023/4/04_2023_140-156.pdf (accessed: 10.11.2024).

4. Очеретяный С.А., Прокофьев В.В. Влияние параметров кавитатора и сопла на эффективность работы генератора импульсных струй. *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 2023;(5):10–24. https://doi.org/10.31857/S1024708422600981

Ocheretyanyi SA, Prokofiev VV. Effect of Cavitator and Nozzle Parameters on the Efficiency Job of the Impulse Jet Generator. *Fluid Dynamics*. 2023;(5):10–24. https://doi.org/10.31857/S1024708422600981

5. Зуйкова З.Г. *Вариационная задача о втекании сжимаемой жидкости в сужающийся канал.* Дис. канд. физ.-мат. наук. Донецк: ДонГУ; 1984. 84 с.

Zuikova ZG. *Variational Problem of the Inflow of a Compressible Fluid into a Narrowing Channel*. Cand.Sci. (Phys.-Math.), diss. Donetsk: DonSU; 1984. 84 p. (In Russ.)

6. Зубов В.И., Зуйкова З.Г. Об одном классе решений задачи оптимизации сопла гидропушки. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1994;34(10):1541–1550. URL: https://www.mathnet.ru/links/ef53959cbfdf54e2c020c950fae97778/zvmmf2511.pdf (дата обращения: 10.11.2024).

Zubov VI, Zuikova ZG. A Class of Solutions to the Problem of Optimizing the Nozzle of a Water Cannon. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1994;34(10):1541–1550.

7. Atanov GA. The Optimal Control Problem of Profiling the Hydro-Cannon Nozzle to Obtain the Maximum Outlet Speed. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C.* 1997;211(7):541–547.

8. Tolstykh VK. Algorithms for Optimizing Systems with Multiple Extremum Functionals. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2024;64(3):392–400. https://doi.org/10.1134/S0965542524030163

9. Кабанихин С.И. Обратные задачи естествознания. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2020;60(6):935–938. https://doi.org/10.31857/S0044466920060046

Kabanikhin SI. Inverse Problems of Natural Science. *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 2020;60:911–914. https://doi.org/10.1134/S0965542520060044

10. Артемьева Л.А., Дряженков А.А., Потапов М.М. Устойчивое решение задачи квадратичной минимизации с неравномерно возмущенным оператором регуляризованным градиентным методом. *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 2022;62(1):12–22. https://doi.org/10.31857/S0044466922010033

Artemyeva LA, Dryazhenkov AA, Potapov MM. Stable Solution of the Quadratic Minimization Problem with a Nonuniformly Perturbed Operator by the Regularized Gradient Method. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2022;62(1):12–22. https://doi.org/10.31857/S0044466922010033

11. Семко А.Н., Локтюшина Ю.В. Об учёте сжимаемости жидкости при расчёте течения в гидропушке. *Вестник Донецкого национального университета*. 2011;(2):95–101. URL: https://donnu.ru/public/journals/files/Vestnik_DonNU_2011_N2_compr.pdf#page=96 (дата обращения: 10.11.2024).

Semko AN, Loktyushina JV. About Compressibility of a Liquid at Current Calculation in the Hydrocannon. *Bulletin of Donetsk National University.* 2011;(2):95–101. URL: https://donnu.ru/public/journals/files/Vestnik_DonNU_2011_N2_compr.pdf#page=96 (accessed: 10.11.2024).

12. Гусев А.А. *Основы гидравлики*, 3-е изд., испр. и доп. Москва: Юрайт, 2019. 218 с. https://urait.ru/index.php/bcode/423733

Gusev AA. *Fundamentals of Hydraulics*, 3rd rev. and enl. ed. Moscow: Urait; 2019. 218 p. (In Russ.)

13. Корпусов М.О., Панин А.А. *Лекции по линейному и нелинейному функциональному анализу. Том III. Нелинейный анализ*. Москва: Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова; 2016. 235 с.

Korpusov MO, Panin AA. *Lectures on Linear and Nonlinear Functional Analysis. Vol. III. Nonlinear Analysis*. Moscow: Lomonosov Moscow State University; 2016. 235 p. (In Russ.)

14. Емельянов В.Н. *Численные методы: введение в теорию разностных схем.* Москва: Юрайт; 2023. 188 с. https://urait.ru/bcode/562837 (дата обращения: 10.11.2024).

Emelyanov VN. *Numerical Methods: Introduction to the Theory of Difference Schemes*. Moscow: Urait; 2023. 188 p. (In Russ.)

15. Семко А.Н. *Импульсные струи жидкости высокой скорости и их применение.* Донецк: Донецкий национальный университет; 2014. 370 с.

Semko AN. *High Velocity Pulsed Liquid Jets and Their Application*. Donetsk: DonNU; 2014. 370 p. (In Russ.)

Об авторах:

Виктор Константинович Толстых, доктор физико-математических наук, доктор технических наук, профессор кафедры компьютерных технологий Донецкого государственного университета (283001, Донецкая Народная Республика, г. Донецк, ул. Университетская, д. 24), SPIN-код, ORCID, Scopus, ResearcherID, mail@tolstykh.com

Юлия Владимировна Дмитрук, старший преподаватель кафедры общей физики и дидактики физики Донецкого государственного университета (283001, Донецкая Народная Республика, г. Донецк, ул. Университетская, д. 24), SPIN-код, ORCID, loktyushina.julia@yandex.ru

Заявленный вклад авторов:

В.К. Толстых: разработка концепции, научное руководство.

Ю.В. Дмитрук: визуализация, написание черновика рукописи.

Конфликт интересов: **авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.**

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the Authors:

Victor K. Tolstykh, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Computer Technology Department, Donetsk State University (24, Universitetskaya Str., Donetsk, 283001, Donetsk People's Republic), SPIN-code, ORCID, Scopus, ResearcherID, mail@tolstykh.com

Yuliia V. Dmitruk, Senior Lecturer of the Department of General Physics and Didactics of Physics, Donetsk State University (24, Universitetskaya Str., Donetsk, 283001, Donetsk People's Republic), SPIN-code, ORCID, loktyushina.julia@yandex.ru

Claimed Contributorship:
VK Tolstykh: conceptualization, supervision.
YV Dmitruk: visualization, writing — original draft preparation.

Conflict of Interest Statement: **the authors do not have any conflict of interest.**

All authors have read and approved the final manuscript.

Поступила в редакцию / Received 20.12.2024
Поступила после рецензирования / Reviewed 17.01.2025
Принята к публикации / Accepted 20.01.2025